Université A/Mira de Béjaia
Département des Sciences de Gestion
1$^{\text{ère}}$ Année Maths I. - 2004/2005

Correction de l'EMD N$^\circ$ 1.

Exercice 1. Soit $f : E \to F$ une application. Que signifient les expressions suivantes ?

- $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ f(x) = y$. Cette expression signifie que tout élément de E possède une image dans F par l'application f, i.e. :
  f est définie sur E tout entier.
- $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) = y$. Cette expression signifie que tous les éléments de E possèdent la même image dans F par l'application f, i.e. :
  f est constante sur E.
- $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$. Cette expression signifie que tout élément de F possède un antécédent dans E par l'application f, i.e. :
  f est surjective.
- $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y$. Cette expression signifie que tous les éléments de F possèdent le même antécédent dans E par l'application f. Ce fait ne peut être vrai que si F ne contient qu'un seul élément, i.e., $F = \{y\}$ car f est une application et donc un élément de E ne peut avoir plus d'une seule image.

Exercice 2. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Montrons que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Soit $x \in E$.

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in (B \cup C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} x \in B \\ \text{ou} \\ x \in C \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \text{ et } x \in B \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ et } x \in C \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \text{ou} \\ x \in A \cap C \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2. Montrons que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Soit $x \in E$.

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} x \in B \\ \text{et} \\ x \in C \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \text{ ou } x \in B \\ \text{et} \\ x \in A \text{ ou } x \in C \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \cup B \\ \text{et} \\ x \in A \cup C \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

3. Simplifier l'expression :

$$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ les fonctions définies par :

$$f(x) = 2x + 1.$$
$$g(x) = \sqrt{2x} + 1.$$

1. f et g sont-elles bijectives ?
   - f est injective ? Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$
   - f est surjective ? Soit $y \in \mathbb{R}$
   $$y = f(x) \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$
   Comme l'expression $\frac{y-1}{2}$ est définie $\forall y \in \mathbb{R}$ on pourra alors écrire :
   $$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R} /\ y = f(x).$$
   Donc, f est surjective.
   - g est injective ? Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$.
   $$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \sqrt{2x_1} + 1 = \sqrt{2x_2} + 1 \Rightarrow \sqrt{2x_1} = \sqrt{2x_2} \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$
   - g est surjective ? Soit $y \in \mathbb{R}_+$.
   $$y = g(x) \Rightarrow y = \sqrt{2x} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{2x} \Rightarrow (y-1)^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{(y-1)^2}{2}.$$
   Pour que $x \in \mathbb{R}_+$ if faux que $\frac{(y-1)^2}{2} \geq 0$, i.e. : $y \geq 1$. Il s'ensuit que si $y \in [0, 1[\subset \mathbb{R}_+$ alors y n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}_+$ et de ce fait g n'est pas surjective.
2. Calculer f^{-1} et g^{-1} et donner leurs domaines de définition.
   f est bijective. Elle est donc, inversible et son inverse f^{-1} est définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$).
   $$y = f(x) \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$
   Donc,
   $$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}.$$
   De même, g est injective et surjective sur $g(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$ et donc, inversible et son inverse g^{-1} est définie sur $g(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$.
   $$y = g(x) \Rightarrow y = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \frac{(y-1)^2}{2}$$
   Donc,
   $$g^{-1}(y) = \frac{(y-1)^2}{2}.$$

3. fog est la composition de deux fonctions injectives donc elle est injective.

$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} [1,+\infty[\subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} f([1,+\infty[) = [3,+\infty[$$

fog est surjective sur $[3,+\infty[$ donc elle est inversible et son inverse $(fog)^{-1}$ est définie sur $[3,+\infty[$.
On a : $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ (voir l'exercice N 5 de la série N 2).

$$[3,+\infty[\xrightarrow{f^{-1}} [1,+\infty[\xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{R}_+$$

Enfin,

$$(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$$

$$= g^{-1}(\frac{x-1}{2}) = \frac{(\frac{x-1}{2}-1)^2}{2} = \frac{(\frac{x-3}{2})^2}{2} = \frac{\frac{(x-3)^2}{4}}{2} = \frac{(x-3)^2}{8}$$

Exercice 4. On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation suivante :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ a-b = 5.k.$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
   – Réflexivité : Soit $a \in \mathbb{Z}$.

$$a - a = 0 = 5.0 \text{ (k=0)} \ \Rightarrow a\mathcal{R}a$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{R} \text{ est réflexive.}$$

   – Symétrie : Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$a\mathcal{R}b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ a-b = 5k$$

$$\Rightarrow b - a = 5(-k) = 5k' \text{ avec } (k' = -k) \ \Rightarrow b\mathcal{R}a$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{R} \text{ est symétrique.}$$

   – Transitivité : Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\left\{\begin{array}{c} a\mathcal{R}b \\ \text{et} \\ b\mathcal{R}c \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{Z},\ a-b = 5k \\ \text{et} \\ \exists k' \in \mathbb{Z},\ b-c = 5k' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a-b = 5k \\ \text{et} \\ b = 5k'+c \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow a - (5k'+c) = 5k \Rightarrow a - c = 5(k+k') = 5k'' \text{ avec } (k'' = k+k') \ \Rightarrow a\mathcal{R}c$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{R} \text{ est transitive.}$$

   Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (congruence modulo 5).

2. Classe d'équivalence de 0 :

$$\dot{0} = \{a \in \mathbb{Z}, /\ a\mathcal{R}0\} = \{a \in \mathbb{Z}/\ \exists k \in \mathbb{Z},\ a - 0 = 5k\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z}/\ \exists k \in \mathbb{Z},\ a = 5k\} = \{5k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}.$$

Classe d'équivalence de 1 :

$$\dot{1} = \{a \in \mathbb{Z}, /\ a\mathcal{R}1\} = \{a \in \mathbb{Z}/\ \exists k \in \mathbb{Z},\ a - 1 = 5k\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z}/\ \exists k \in \mathbb{Z},\ a = 5k + 1\} = \{5k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}.$$

Exercice 5. Calcul des limites :

1.
$$\lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1} \left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{-\infty - \infty} = 0.$$

2.
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{2}{x^2})} - \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x^2})}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \right)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \right)}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \right)}{2}$$

$$= \frac{-\left(\sqrt{1 + 0} - \sqrt{1 - 0} \right)}{2} = 0$$
