Université A/Mira de Béjaia
Département des Sciences de Gestion
1$^{\text{ère}}$ Année Maths I. - 2004/2005

Correction de l'EMD N° 2.

Exercice 1. Soit u_n la suite réelle telle que :

$$u_0 = \sqrt{2}.$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer qu'elle est croissante.
3. Déduire sa nature et calculer sa limite.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
L'hypothèse est vraie pour $n = 0$ car $1 \leq u_0 = \sqrt{2} \leq 2$.
Supposons que l'hypothèse reste vraie jusqu'à l'ordre $n-1$, i.e., $1 \leq u_{n-1} \leq 2$ et montrons qu'elle reste vraie pour l'ordre n, i.e., on montre que $1 \leq u_n \leq 2$.
D'après l'hypothèse de récurrence,

$$1 \leq u_{n-1} \leq 2$$

donc,

$$2+1 \leq 2+u_{n-1} \leq 2+2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{2+u_{n-1}} \leq \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 1 \leq u_n \leq 2.$$

Ce qu'il fallait démontrer.
Montrons que u_n est croissante : (Remarquons que $u_n > 0$).

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2+u_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{2+u_n}{u_n^2}} = \sqrt{\frac{2}{u_n^2} + \frac{1}{u_n}}$$

Comme $1 \leq u_n \leq 2$ on aura $\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{u_n^2} \geq \frac{1}{4}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{2}{u_n^2} + \frac{1}{u_n}} \geq \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{1}{2}} = 1.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow \ u_n \text{ est croissante.}$$

(On peut également le démontrer par récurrence).

u_n est croissante et majorée donc *elle est convergente*. Calculons sa limite.
On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n+2} \Rightarrow l = \sqrt{l+2}.$$

$$l^2 = l+2 \Rightarrow l^2 - l - 2 = 0.$$

$$\Delta = 9 \Rightarrow l_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ (rejetée car } u_n > 0\text{)} \; , l_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercice 2. Soit f la fonction :

$$f(x) = x^2 + |x|.$$

Etudier la continuité et déivabilité de f.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{Si } x \leq 0\,; \\ x, & \text{Si } x > 0. \end{cases}$$

Donc ;

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x, & \text{Si } x \leq 0\,; \\ x^2 + x, & \text{Si } x > 0. \end{cases}$$

Pour $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = x^2 - x$ donc f est continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ (car polynôme).
Pour $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x^2 + x$ donc f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ (car polynôme).
Continuité au point $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 - x = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + x = 0.$$

$$f(0) = 0.$$

Donc f est continue au point 0 et par suite sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Dérivabilité au point $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} x - 1 = -1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x + 1 = 1.$$

Donc f n'est pas dérivable au point 0.

Exercice 3. Soit f la fonction :

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x + 1.$$

Trouver les extréma relatifs de f.

1. Points critiques de f :

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x.$$

Comme $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on aura :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0.$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16. \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4.$$

On obtient donc :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \text{ou } x = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Donc, f a deux points critiques $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
2. Calculons f'' :

$$f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 3)e^x = (x^2 + 4x - 1)e^x.$$

2.1. Pour $x_1 = -3$ nous avons :

$$f''(x_1) = f''(-3) = ((-3)^2 + 4(-3) - 1)e^{-3} = -4e^{-3} < 0$$

Donc $f(-3) = ((-3)^2 - 3)e^{-3} + 1 = 6e^{-3} + 1$ est un maximum relatif (local) de f.
2.2. Pour $x_2 = 1$ nous avons :

$$f''(x_2) = f''(1) = ((1)^2 + 4(1) - 1)e^1 = 4e > 0$$

Donc $f(1) = ((1)^2 - 3)e^1 + 1 = -2e + 1$ est un minimum relatif (local) de f.

Exercice 4. Soit la fonction :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction sh.

2. Donner l'équivalent de $\frac{sh(x)}{x}$ au voisinage de 0 puis calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{sh(x)}{x}.$$

En utilisant la formule de Taylor, on obtient le développement limité de e^x à l'ordre 3 au point 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

En changeant x par $-x$, on obtient :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Donc,

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}[(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) - (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})] + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

D'après le DL(3) en 0 de sh, on déduit que :

$$sh(x) \simeq x + \frac{x^3}{6} \Rightarrow \frac{sh(x)}{x} \simeq 1 + \frac{x^2}{6}.$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sh(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{x^2}{6} = 1.$$

Exercice 5. Calculons $\int_0^1 (e^x + 3x^2)dx$:

$$\int_0^1 (e^x + 3x^2)dx = \left[e^x + x^3\right]_0^1 = (e + 1) - (1 + 0) = e.$$

Calculons $\int_{-2}^2 |x^2 - 1|dx$:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x^2 - 1|dx &= \int_{-2}^{-1} |x^2 - 1|dx + \int_{-1}^1 |x^2 - 1|dx + \int_1^2 |x^2 - 1|dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx + \int_{-1}^1 -(x^2 - 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{1}^{2}\end{aligned}$$

$$= \left[(\frac{-1}{3} + 1) - (\frac{-8}{3} + 2)\right] - \left[(\frac{1}{3} - 1) - (\frac{-1}{3} + 1)\right] + \left[(\frac{8}{3} - 2) - (\frac{1}{3} - 1)\right]$$

$$= \left[\frac{-1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2\right] - \left[\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1\right] + \left[\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right]$$

$$= \left[\frac{7}{3} - 1\right] - \left[\frac{2}{3} - 2\right] + \left[\frac{7}{3} - 1\right] = \frac{7}{3} - 1 - \frac{2}{3} + 2 + \frac{7}{3} - 1 = 4$$