Fonctions réelles d'une variable réelle

0.1 Definitions

Une application f d'un ensemble E est dite *fonction numérique* ou *fonction réelle* si elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réelles. Si E est une partie de $\mathbb{R}$ on dit que f est une fonction réelle d'une variable réelle.

On notera f la fonction, alors que $f(x)$ désigne l'image de x par la fonction f (la valeur que prend la fonction f au point x).

Exemple 1. *L'application f qui associe à chaque x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ est une fonction réelle à variable réelle.*

0.2 Graphe d'une fonction

On appelle graphe d'une fonction réelle f, la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ formée des points $(x, f(x))$, $x \in E$.

0.3 Monotonie

Soit $f : E \to F$ $(E, F \subset \mathbb{R})$ une fonction réelle.

0.3.1 Croissance

On dit que f est croissante si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

et on dit que f est strictement croissante si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Exemple 2. *La fonction $f_1(x) = 2x + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a :*

$$x_2 > x_1 \Rightarrow 2x_2 > 2x_1 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 2x_1 + 1 \Rightarrow f_1(x_2) > f_2(x_1).$$

0.3.2 Décroissance

On dit que f est décroissante si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

et on dit que f est strictement croissante si :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Exemple 3. *La fonction $f_2(x) = -2x + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a :*

$$x_2 > x_1 \Rightarrow -2x_2 < -2x_1 \Rightarrow -2x_2 + 1 < -2x_1 + 1 \Rightarrow f_2(x_2) < f_2(x_1).$$

0.3.3 Monotonie

On dit que f est monotone si elle est ou bien croissante ou bien décroissante. Elle est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 4. *Les deux fonctions f_1 et f_2 sont strictement monotones.*

0.4 Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : E \to F$ $(E, F \subset \mathbb{R})$ une fonction réelle.

0.4.1 Fonctions majorées

On dit que f est majorée ou bornée supérieurement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq M.$$

Exemple 5. *La fonction $g(x) = \frac{1}{2x^2+1}$ est majorée par 1. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2x^2+1} \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq 1.$$

0.4.2 Fonctions minorées

On dit que f est minorée ou bornée inférieurement si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \geq m.$$

Exemple 6. *La fonction $g(x) = \frac{1}{2x^2+1}$ est minorée par 0. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2x^2+1} \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0.$$

0.4.3 Fonctions bornées

f est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée. C'est à dire :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, m \leq f(x) \leq M.$$

Exemple 7. *La fonction* $g(x) = \frac{1}{2x^2+1}$ *est majorée par* 1 *et minorée par* 0 *:*

$$0 \leq g(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Elle est donc bornée.

0.5 Fonctions paires, impaires, périodique

Soit $f : E \to F$ $(E, F \subset \mathbb{R})$ une fonction réelle.

0.5.1 Fonctions paires

On dit que f est paire si :

$$\forall x \in E, f(-x) = f(x).$$

Exemple 8. *La fonction* $h_1(x) = 2x^2$ *est paire. En effet, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$h_1(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = h_1(x).$$

0.5.2 Fonctions impaires

On dit que f est impaire si :

$$\forall x \in E, f(-x) = -f(x).$$

Exemple 9. *La fonction* $h_2(x) = 2x$ *est impaire. En effet, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$h_2(-x) = 2(-x) = -2x = -h_2(x).$$

0.5.3 Fonctions périodiques

On dit que f est périodique si :

$$\exists T \in \mathbb{R}, T \neq 0, \forall x \in E, f(x+T) = f(x).$$

La constante T est appelée *période* de la fonction f.

0.6 Limite d'une fonction

Soit $f : E \to F$ $(E, F \subset \mathbb{R})$ une fonction réelle et soit x_0 un point de $\mathbb{R}$.

0.6.1 Définition

On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la limite de f au point x_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

On écrit alors :

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

ou :

$$f \to l \text{ quand } x \to x_0,$$

et on lit : f tend vers l quand x tend vers x_0.

Si la limite de f au point x_0 existe alors elle est unique.

0.6.2 Limite à droite, à gauche

On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la limite à droite au point x_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x : x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

On écrit alors :

$$l = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

De même,on dit que $l \in \mathbb{R}$ est la limite à gauche au point x_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x : x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

On écrit alors :

$$l = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Si la limite de f au point x_0 existe et si les limites à droite et à gauche existent alors elles sont égales à cette limite. Inversement, si la limite à droite et à gauche existent et sont égales alors la limite existe et elle est égale à leurs valeur commune.

0.6.3 Limite à l'infinie

Quand x devient infini, on écrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

si

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \ : \ x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

De même,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

signifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \ : \ x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

0.6.4 Limite infinie

Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. Alors,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0 \ : \ 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0 \ : \ 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -A.$

quand x devient infini,

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 \ : \ x > B \Rightarrow f(x) > A.$

$\lim\limits_{x\to +-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 \ : \ x < -B \Rightarrow f(x) > A.$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 \ : \ x > B \Rightarrow f(x) < -A.$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 \ : \ x < -B \Rightarrow f(x) < -A.$

0.6.5 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ et admettant au point x_0 les limites l et l' respectivement. Alors,

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'.$

$\lim\limits_{x\to x_0} [\lambda f(x)] = \lambda l, \ (\lambda \in \mathbb{R}).$

$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = ll'.$

$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|.$

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}, \text{ si } l' \neq 0.$

Exemple 10. *Cherchons la limite* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2$.
Lorsque $x \to +\infty$ *on a :*

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 = \lim_{x\to +\infty} x \times x = \lim_{x\to +\infty} x \times \lim_{x\to +\infty} x = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty.$$

De la même manière on montre que pour tout entier non nul n*, on a :*

$$\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty.$$

Ce qui donne que pour tout polynôme $P(x)$ *d'ordre* $n > 0$*, on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} P(x) &= \lim_{x\to +\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n) \\ &= \lim_{x\to +\infty} a_0 x^n + \lim_{x\to +\infty} a_1 x^{n-1} + ... + \lim_{x\to +\infty} a_{n-1}x + \lim_{x\to +\infty} a_n \\ &= a_0 \lim_{x\to +\infty} x^n + a_1 \lim_{x\to +\infty} x^{n-1} + ... + a_{n-1} \lim_{x\to +\infty} x + a_n \\ &= a_0(+\infty) + a_1(+\infty) + ... + a_{n-1}(+\infty) + a_n = +\infty. \end{aligned}$$

Formes indéterminées

$+\infty - \infty$.

$0/0$.

∞/∞.

$0.\infty$.

1^∞.