**Université A/Mira de Béjaia**
**Département des Sciences de Gestion**
**1ère Année (Sections B et C).** Maths I. - 2004/2005

# Epreuve de Synthèse.

**Barème : 8 + 4 + 8.** **Durée : 1 H 30 mn.**

**Exercice 1.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Notons par $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$ les ensembles de parties de $E$ et $F$ respectivement. On définit la différence symétrique de $A$ et $B$ par :

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

On rappelle que $A - B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

**I.** Montrer que :

- $A\Delta B = (A \cup B) \cap \complement_E(A \cap B)$.
- $A\Delta B = (\complement_E A)\Delta(\complement_E B)$.
- $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$.

**II.** Soient $f : E \to F$ une application. Montrer que :

- $\forall X, Y \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(X\Delta Y) = f^{-1}(X)\Delta f^{-1}(Y)$.
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A\Delta B) = f(A)\Delta f(B)$ si et seulement si $f$ est injective.

**III.** Soit $S$ une partie de $E$. On définit dans $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\ \mathcal{R}\ B \Leftrightarrow A\Delta B \subset S.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}(E)$.

**Exercice 2.** Soit $u_n$ la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Considérons les deux suites extraites $u_{2n}$ et $u_{2n+1}$.

- Etudier la convergence de $u_{2n}$ et $u_{2n+1}$.
- Calculer la limite de $u_{2n}$ et celle de $u_{2n+1}$.
- Déduire la nature de $u_n$.

**Tourner la page.**

**Exercice 3.** La commercialisation d'un article sur un marché suit une fonction d'offre notée $f$ et une fonction demande notée $g$. Ces fonctions sont définies sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{8} \quad \text{et} \quad g(x) = 8\frac{15}{e^x + 15}.$$

Où $x$ représente la quantité exprimée en milliers d'articles, $f(x)$ représente le prix de vente exprimé en euros pour une quantité $x$ offerte et $g(x)$ représente le prix de vente exprimé en euros pour une quantité $x$ demandée.

1. Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.
2. Calculer $g'$ puis déterminer le sens de variation de la fonction $g$ sur $[0, \infty[$.
3. Donner l'equation de la tangente au point $x_0 = \ln 25$.
4. On admet que sur l'intervalle $[0, +\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$ a une solution unique notée $q$, appelée quantité échangée. On note $p = f(q) = g(q)$ le prix d'équilibre correspondant. Déterminer $p$ et $q$.
5. On appelle surplus du consommateur (en milliers d'euros) le nombre :

$$R = \int_0^q g(x)dx - pq.$$

   Calculer la valeur exacte de $R$.

---

**Bonne chance.**

---